

**REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA**



**XXII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA**

**ENUNCIADOS Y SOLUCIONES**

**DE LAS**

**PRUEBAS PROPUESTAS**

**Murcia, 7 al 10 de abril de 2011**



**Real  
Sociedad  
Española de  
Física**





### Problema 1. Murcia: Sol, mar y salinas.

La Región de Murcia disfruta de un privilegiado clima mediterráneo. Goza de inviernos suaves y veranos calurosos, teniendo en promedio 300 días de sol al año. Gracias a ello gran parte de su territorio es un vergel: la *huerta murciana*. Sin embargo, sus recursos hídricos no son especialmente abundantes, las precipitaciones son escasas y concentradas en pocos días. Por ello, a lo largo de toda su historia, los murcianos han sabido aprovechar hasta la última gota de agua, como lo demuestran los numerosos ingenios hidráulicos que han construido: molinos, norias, acequias, azudes, etc., parte de los cuales todavía están en uso. Podemos mencionar los molinos existentes en el río Segura, de visita obligada en el centro de la ciudad de Murcia, y las norias de Abarán y Alcantarilla.

Por otra parte, también han sabido aprovechar su abundante energía solar. Ejemplos de ello son los parques fotovoltaicos, entre los que destaca el existente en Jumilla, el mayor de Europa cuando fue inaugurado en 2008, y múltiples salinas como las de San Pedro del Pinatar en la laguna del Mar Menor, protagonista de este problema.

Refiriéndonos a la radiación solar, se denomina *constante solar* a la energía que, por unidad de tiempo y unidad de superficie normal a la dirección de propagación, llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. Esta constante, que es una densidad superficial de potencia, o intensidad de energía, tiene por valor  $k = 1,366 \text{ kW/m}^2$ . Debido a la absorción y difusión en la atmósfera, a la superficie de la Tierra sólo llega, en días soleados, una fracción  $\beta = 0,5$  de dicha intensidad solar.

Para simplificar el problema admitiremos que la trayectoria aparente del Sol está en un plano perpendicular a la superficie de la Tierra<sup>1</sup>.

En un día soleado, la energía que se recibe en la superficie de la Tierra depende de la *altura angular* del Sol, es decir del ángulo  $\theta$  que se muestra en la figura 1. Naturalmente, este ángulo varía a lo largo del día.

a) Para un día soleado y para una “altura” angular del Sol,  $\theta$ , determina la potencia  $P$  que deposita la radiación solar en un área  $S$  de la superficie terrestre.

b) Determina la potencia media,  $\langle P \rangle$ , que recibe la superficie  $S$  a lo largo de un día, es decir para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Véanse las Notas 1 y 2 al final del ejercicio.

En las salinas, la energía solar se utiliza para evaporar el agua de mar y extraer la sal disuelta. El proceso es complejo y se lleva a cabo mediante la parcelación de las aguas en distintos estanques: almacenadores, calentadores y cristalizadores en los que se precipita la sal. Son estos últimos estanques los que centrarán la atención de este ejercicio.

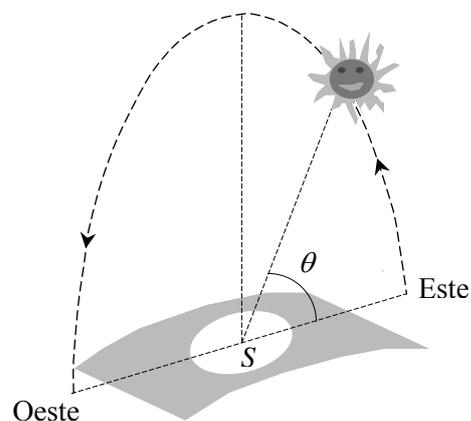


Fig.1

<sup>1</sup> Realmente la latitud de Murcia es de unos  $38^\circ$ , y el ángulo que forma el plano ecuatorial de la Tierra con el de la eclíptica es de unos  $23^\circ$ . Por tanto, en verano, el plano de la órbita aparente del Sol forma un ángulo de unos  $15^\circ$  con la vertical.

Supongamos que los estanques de cristalización de las salinas de San Pedro tienen una profundidad media  $h = 0,15$  m y con una concentración de sal del 4,5% en masa,  $c_m = 0,045$ . En condiciones de presión y temperatura medias, la densidad del agua es  $\rho = 1,03 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup> y su calor de vaporización es  $L = 2,4 \cdot 10^3$  kJ/kg.

c) Considerando que el tiempo medio de insolación en un día es  $T_{1/2} = 12$  horas, determina el número  $n$  de días soleados que se necesitan para evaporar el agua de los estanques de cristalización y calcula su valor.

Estudiemos ahora aspectos relativos a la emisión de energía por el Sol. Como se ha mencionado, la constante solar  $k$  es la densidad superficial de potencia que llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. A partir de este dato y sabiendo que la distancia Tierra-Sol es  $R = 1,49 \cdot 10^{11}$  m,

d) Determina la potencia total emitida por el Sol,  $P_S$ , y calcula su valor.

La energía que emite el Sol conlleva una disminución de su masa de acuerdo con la conocidísima fórmula de Einstein  $E = mc^2$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $c = 2,998 \cdot 10^8$  m/s.

e) Determina la masa que pierde el Sol cada segundo,  $\mu_S$ , y calcula su valor.

Por último, vamos a estudiar si esta pérdida de masa afecta de forma apreciable al radio de la órbita de la Tierra en torno al Sol.

f) Teniendo en cuenta la ley de Gravitación Universal y la conservación del momento angular de la Tierra respecto al Sol, determina la variación relativa del radio de la órbita terrestre,  $\Delta R / R$ , en función de la variación relativa de la masa del Sol,  $\Delta M_S / M_S$ .

g) Calcula la variación anual del radio de la órbita terrestre, sabiendo que la masa del Sol es  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg.

**Nota 1** .- El valor medio de una función  $f(x)$  en un intervalo  $\Delta x = x_2 - x_1$  se define como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Geoméricamente este valor medio coincide con la altura de un rectángulo de base  $\Delta x$  y cuya área sea igual a la comprendida entre la curva  $f(x)$  y el eje X, entre  $x_1$  y  $x_2$ , como se muestra en la figura 2.

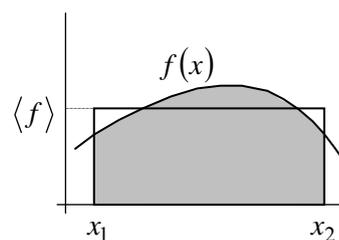


Fig. 2

**Nota 2.-** 
$$\int \sin \alpha \, d\alpha = -\cos \alpha$$

$$\int \cos \alpha \, d\alpha = \sin \alpha$$

**Solución: Problema 1. Murcia: Sol, mar y salinas.**

- a) De acuerdo con el enunciado, la intensidad que llega a la superficie de la Tierra procedente del Sol es una fracción  $\beta = 0,5$  de la constante solar.

$$k' = \beta k \quad (1)$$

Para determinar la potencia instantánea que deposita la radiación sobre un área  $S$  cuando la altura del Sol es  $\theta$  (figura 1 del enunciado), es preciso considerar la proyección de dicha superficie en dirección perpendicular a los rayos, como se muestra en la figura 3. Como  $S' = S \sin \theta$ , la potencia instantánea,  $P$ , en el área  $S$ , será

$$P = \beta k S \sin \theta \quad (2)$$

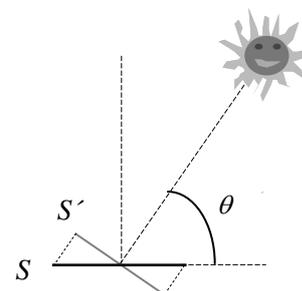


Fig.3

- b) Esta potencia  $P$  es función de  $\theta$ , que varía a lo largo del día. La potencia media diaria se calcula, de acuerdo con la Nota 1 del enunciado, evaluando el valor medio de (2) desde que el Sol sale hasta que se pone, es decir desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ .

$$\langle P \rangle = \beta k S \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{2}{\pi} \beta k S \quad (3)$$

- c) El volumen de agua de mar en los estanques cristalizadores de las salinas de San Pedro es  $V = h S$ , donde  $S$  es ahora el área de dichos estanques. Por lo tanto la masa de agua de mar que contienen es  $m = \rho h S$ . Como la concentración de sal es  $c_m = 0,045$ , la masa de agua que hay que evaporar es

$$m_{agua} = \rho h S (1 - c_m)$$

Por lo tanto, la energía que se necesita para la evaporación es

$$W = L m_{agua} = \rho L h S (1 - c_m)$$

Como la potencia que recibe la salina es  $\langle P \rangle$ , durante un día soleado la energía absorbida es igual al producto de  $\langle P \rangle$  por  $T_{1/2} = 12$  horas  $= 4,32 \cdot 10^4$  s. En consecuencia, el número de días soleados necesarios para extraer la sal será

$$n = \frac{L h S \rho (1 - c_m)}{\langle P \rangle T_{1/2}} = \frac{L h S \rho (1 - c_m) \pi}{2 \beta k S T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{L h \rho (1 - c_m) \pi}{2 \beta k T_{1/2}}$$

Teniendo en cuenta los datos numéricos del enunciado, resulta

$$n = 19 \text{ días}$$

- d) Dado que el Sol emite en todas las direcciones, si la constante solar  $k$  es la energía que llega a la Tierra por unidad de tiempo y unidad de superficie, a una esfera de radio  $R$ , igual a la distancia Sol-Tierra y centrada en el Sol le llegará toda la energía que el Sol emite por segundo, es decir, la potencia  $P_S$  que nos piden.

$$P_S = 4\pi R^2 k \quad \Rightarrow \quad P_S = 3,8 \cdot 10^{20} \text{ MW}$$

- e) De acuerdo con el resultado anterior, en un intervalo de tiempo  $\tau$  el Sol emite una cantidad de energía,

$$W_S = 4\pi R^2 k \tau$$

Y en virtud de la famosa ecuación de Einstein, esta emisión de energía supone que el Sol pierde en ese intervalo de tiempo una masa

$$\Delta M_S = \frac{W_S}{c^2} = \frac{4\pi R^2 k \tau}{c^2}$$

Por tanto en un tiempo  $\tau = 1$  s el Sol pierde una masa

$$\boxed{\mu_S = \frac{4\pi R^2 k}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_S = 4,2 \cdot 10^9 \text{ kg/s}}$$

- f) La ley de gravitación proporciona la relación entre la masa del Sol y el radio orbital  $R$  de la Tierra. Si  $M_T$  es la masa de la Tierra y  $\omega$  su velocidad angular orbital, se tiene

$$G \frac{M_S M_T}{R^2} = M_T \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad M_S = \frac{\omega^2}{G} R^3 \quad (4)$$

Nótese que una variación de  $M_S$  afecta a  $R$  y a  $\omega$ , pero estas dos variables no son independientes. La fuerza de interacción gravitatoria es central, luego debe conservarse el momento angular de la Tierra respecto al Sol

$$L_0 = M_T \omega R^2 \quad (5)$$

Eliminando  $\omega$  entre (4) y (5), queda

$$M_S = \frac{L_0^2}{G M_T^2} \frac{1}{R} = \gamma \frac{1}{R} \quad (6)$$

Donde  $\gamma = L_0^2 / G M_T^2$  es una constante. Tomando incrementos en (6)

$$\Delta M_S = -\gamma \frac{\Delta R}{R^2} \quad (7)$$

El signo negativo de (7) significa que una pérdida de masa del Sol implica un aumento de la distancia Sol-Tierra. ¡Nos alejamos del Sol poco a poco!

Dividiendo ambos miembros de (7) por la masa (actual) del Sol y teniendo en cuenta (6), se obtiene

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = - \frac{\Delta M_S}{M_S}}$$

- g) En un tiempo  $T = 1$  año  $= 3,15 \cdot 10^7$  s la pérdida de masa del Sol es

$$\Delta M_S = -\mu_S T = -1,3 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

Y el aumento de la distancia Tierra-Sol resulta

$$\Delta R = -R \frac{\Delta M_S}{M_S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta R = 1,0 \text{ cm}}$$

### Problema 2. Tablón oscilante.

Se coloca un tablón delgado y homogéneo, de masa  $M$  y longitud  $L$ , sobre un par de rodillos que giran con la misma velocidad angular constante, pero en sentidos opuestos. En la figura 1 se muestra este sistema cuando el tablón está colocado simétricamente respecto a los rodillos. La distancia entre los ejes de los rodillos es  $b$  y el coeficiente de rozamiento entre el tablón y dichos rodillos es  $\mu$ .

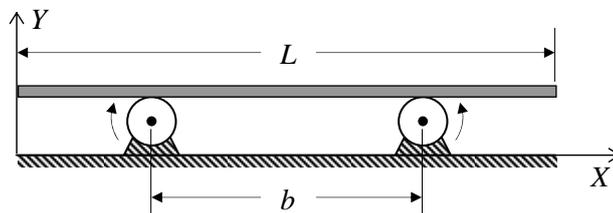


Fig. 1

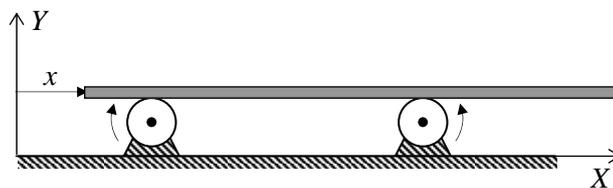


Fig. 2

a) Cuando el tablón se aparta una distancia  $x$  de la posición simétrica, como se representa en la figura 2, dibuja un diagrama en el que se muestren las fuerzas que actúan sobre el tablón.

b) Demuestra que el tablón permanece en equilibrio si se coloca exactamente en la posición simétrica respecto a los cilindros ( $x = 0$ ).

Cuando el tablón se libera en una posición como la representada en la figura 2, es decir separado una distancia  $x$  de la posición de equilibrio, realiza un movimiento oscilatorio armónico. Se supone que la velocidad angular de los rodillos es lo suficientemente elevada para que en ningún momento el tablón deje de deslizarse sobre ellos.

c) Determina el periodo  $T$  de las oscilaciones del tablón.

Estando el tablón en la posición de equilibrio, se le aplica un impulso horizontal de magnitud  $I$ , de forma que empieza a oscilar en torno a dicha posición de equilibrio.

d) Determina el máximo impulso que se puede aplicar al tablón,  $I_{\max}$ , para que permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos.

## Solución Problema 2. *Tablón oscilante*

- a) Las fuerzas que actúan sobre el tablón son las representadas en la figura 3. Como en todo momento existe deslizamiento entre el tablón y los rodillos, el módulo de cada fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo:

$$F_{r1} = \mu N_1 \quad \text{y} \quad F_{r2} = \mu N_2$$

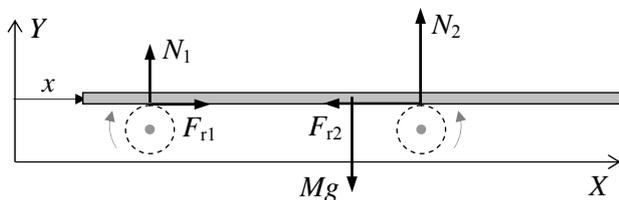


Fig. 3

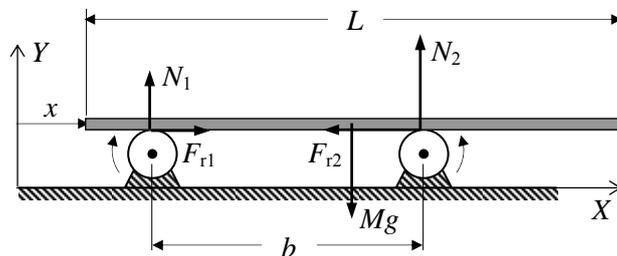


Fig. 4

- b) En la posición simétrica ( $x = 0$ ) las reacciones normales son iguales:  $N_1 = N_2 = Mg/2$ , por lo que las fuerzas de rozamiento (máximas puesto que existe deslizamiento) tienen el mismo módulo y, al ser de sentidos opuestos, la fuerza resultante horizontal es nula. En consecuencia el tablón permanece en equilibrio.
- c) Si el tablón se aparta una distancia  $x$  de la posición de equilibrio, como se indica en la figura 4, las reacciones normales dejan de ser iguales, y por consiguiente las fuerzas de rozamiento. La fuerza neta horizontal que actúa sobre el tablero es

$$F_x = F_{r1} - F_{r2} = \mu(N_1 - N_2) \quad (1)$$

Para determinar esta fuerza es necesario conocer el valor de las fuerzas normales. En primer lugar,

$$N_1 + N_2 = Mg \quad (2)$$

Por otra parte, como el tablón solo se desplaza horizontalmente, el momento de las fuerzas exteriores tiene que ser cero, respecto a cualquier punto. En particular, respecto al centro de masas del tablón, se puede escribir

$$N_1 \left( \frac{b}{2} + x \right) = N_2 \left( \frac{b}{2} - x \right) \quad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que

$$N_1 = Mg \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{b} \right) \quad \quad N_2 = Mg \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{b} \right)$$

Y, por tanto, la fuerza horizontal (1) sobre el tablón es

$$F_x = -\frac{2\mu M g}{b} x$$

y la aceleración con que se mueve viene dada por

$$a = -\frac{2\mu g}{b} x \quad (4)$$

A la vista de la expresión (4) se deduce inmediatamente que el movimiento del tablón es oscilatorio armónico, independiente de la masa del tablón y con una pulsación y un periodo dados por

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{b}} \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{2\mu g}}}$$

d) Dado que el tablón realiza un movimiento oscilatorio armónico, su elongación y su velocidad son

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (5a)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5b)$$

siendo  $A$  la amplitud y  $\varphi$  la fase en  $t = 0$ , cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

De acuerdo con el enunciado, el tablón está inicialmente en reposo (posición de equilibrio) y se pone en movimiento mediante un impulso horizontal  $I$ . Como el impulso es igual a la variación del momento lineal del sistema, se tiene

$$I = M v_0$$

donde  $v_0$  es la velocidad con que comienza a desplazarse el tablón.

Por lo tanto, las condiciones iniciales son

$$x(t = 0) = 0$$

$$v(t = 0) = v_0$$

Aplicando estas condiciones en (5a) y (5b), se deduce que

$$0 = A \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \quad (6)$$

Si la longitud del tablón es  $L$ , para que al oscilar permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos la máxima amplitud de sus oscilaciones, tiene que cumplir la relación (figura 5)

$$2A_{\max} + b = L \quad \Rightarrow \quad A_{\max} = \frac{L - b}{2} \quad (7)$$

En consecuencia, la velocidad inicial máxima es

$$v_0 = \omega \frac{L - b}{2}$$

Finalmente, el impulso máximo que se podrá aplicar es

$$I_{\max} = M \omega \frac{L - b}{2}$$

y teniendo en cuenta el valor de  $\omega$  queda

$$\boxed{I_{\max} = \frac{1}{2} M (L - b) \sqrt{\frac{2\mu g}{b}}}$$

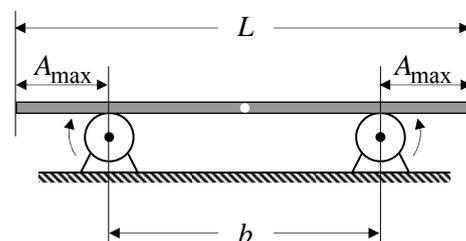


Fig. 5

### Problema 3. El experimento de Millikan.

En el año 1909 Robert Millikan y Harvey Fletcher diseñaron y realizaron el primer experimento para medir la carga del electrón. Hasta entonces los electrones sólo habían podido ser observados en forma de rayos catódicos, pero con ellos sólo se podía determinar la relación entre su carga y su masa. Con este experimento, Millikan logró medir el valor de la carga  $y$ , por tanto, también el de la masa. Para ello supuso (por aquel entonces no estaba verificado) que la carga del electrón era la fundamental  $y$ , en consecuencia, la carga de cualquier cuerpo sería un múltiplo de dicha cantidad.

El equipo básico para realizar el experimento de Millikan está representado esquemáticamente en la figura 1. En una cámara cerrada se pulverizan pequeñas gotas de un aceite especial, de densidad  $\rho$ . Algunas de estas gotas se electrizan levemente en el momento de ser pulverizadas. Lógicamente, cada gota empieza a caer verticalmente por la acción de la gravedad, pero a su vez el aire ejerce sobre ellas una fuerza de resistencia que se opone a su movimiento y cuyo módulo es proporcional a la velocidad de caída. Esta fuerza, para un pequeño cuerpo esférico, satisface la ley de Stokes

$$F_r = 6 \pi \eta r v$$

Donde  $\eta$  es la viscosidad del fluido (aire) en el que caen las gotas de aceite,  $r$  es el radio de las gotas y  $v$  su velocidad de caída.

Como las gotas se cargan ligeramente al capturar iones presentes en el aire, o simplemente por fricción con la boquilla del pulverizador, con este experimento se comprobó que las cargas son un múltiplo de la carga elemental  $e$ , y pudo determinarse su valor.

Dado que la densidad del aire es mucho menor que la del aceite, en este problema no se tendrá en cuenta el empuje hidrostático sobre las gotas (principio de Arquímedes).

- Escribe la ecuación del movimiento de una gota de aceite, de masa  $m$ , que cae en el aire bajo la acción de la gravedad,  $g$ .
- Transcurrido un corto intervalo de tiempo a partir del instante en el que la gota comienza su caída en el aire, su velocidad tiende a un valor constante, que se denomina velocidad límite,  $v_L$ . Determina dicha velocidad en función de la aceleración de la gravedad  $g$ , de la densidad  $\rho$  del aceite, de la viscosidad del aire  $\eta$  y del radio  $r$  de la gota.
- Dibuja cualitativamente la grafica de la velocidad de caída de la gota en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.

La velocidad límite se puede medir por observación directa de la caída de la gota con un microscopio que dispone de una escala graduada. Sin embargo, no es fácil medir el radio y masa de las gotas.

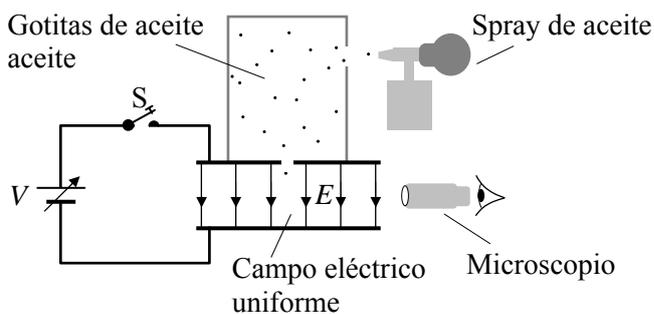


Fig. 1

En una experiencia de laboratorio en el que se utiliza un montaje como el descrito antes, se observa que, en ausencia de campo eléctrico ( $E = 0$ ), una determinada gota cae con una velocidad límite  $v_L = 1,20 \cdot 10^{-4}$  m/s. Sabiendo que la viscosidad del aire es  $\eta = 1,80 \cdot 10^{-5}$  Pa·s, la densidad del aceite es  $\rho = 8,99 \cdot 10^2$  kg/m<sup>3</sup> y que la aceleración de la gravedad es  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

d) Determina la expresión de la masa  $m$  de la gota y calcula su valor.

Cerrando el interruptor S, se establece un campo eléctrico uniforme  $E$  como se muestra en la figura 1, cuyo valor se puede regular cambiando el potencial V. Ajustando este campo eléctrico se puede parar la gota, es decir, mantenerla en reposo.

e) Si el campo que mantiene a la gota en reposo es  $E = 9,35 \cdot 10^4$  V/m, calcula el valor de esta carga  $q$ .

En la misma experiencia y siguiendo el mismo procedimiento, se determinaron las cargas de otras gotas. Los valores que se obtuvieron son  $q' = 4,54 \cdot 10^{-19}$  C y  $q'' = 3,05 \cdot 10^{-19}$  C. A partir de los valores de  $q$ ,  $q'$  y  $q''$

f) Calcula el valor  $e$  de la carga fundamental del electrón.

Nota: En el experimento original, Robert Millikan y Harvey Fletcher obtuvieron un valor ligeramente menor al conocido actualmente para la carga del electrón.

### Solución Problema 3. El experimento de Millikan

- a) Las fuerzas que actúan sobre la gota son las representadas en la figura 2. En virtud de la 2ª ley de Newton la ecuación del movimiento es:

$$m a = m g - F_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{m a = m g - 6\pi\eta r v} \quad (1)$$

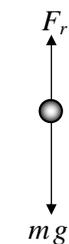


Fig. 2

- b) De acuerdo con (1), conforme aumenta el módulo de la velocidad de caída de la gota, la aceleración disminuye. A partir del valor de la velocidad que anula la aceleración, el movimiento será uniforme y dicha velocidad será la llamada velocidad límite  $v_L$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = \frac{m g}{6\pi\eta r} \quad (2)$$

Por otra parte, la masa de la gota en función de la densidad del aceite es

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad (3)$$

Eliminando  $r$  entre (2) y (3), se obtiene como velocidad límite

$$\boxed{v_L = \frac{2g\rho}{9\eta} r^2}$$

- c) Tal como sugiere el enunciado, consideraremos que en el instante inicial la velocidad vertical de la gota es nula, por lo que la gráfica  $v(t)$  pasa por el origen de coordenadas. Además, al eliminar en (1) el término dependiente de la velocidad en el instante inicial, se deduce que la pendiente en el origen es

$$\operatorname{tg} \varphi = g$$

Además, con el transcurso del tiempo la velocidad tiende al valor límite, por lo que  $v = v_L$  es una asíntota. Con todo ello, el aspecto de la gráfica es el representado en la figura 3.

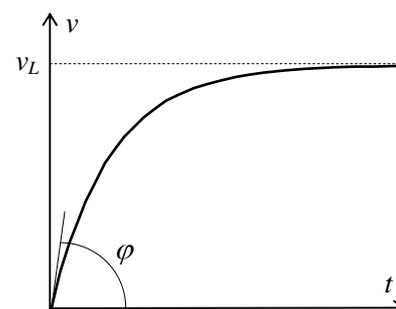


Fig. 3

- d) Eliminando  $r$  entre las expresiones (2) y (3) y despejando la masa, se obtiene

$$\boxed{m = \sqrt{\frac{162 \pi^2 \eta^3 v_L^3}{\rho g^3}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 4,36 \cdot 10^{-15} \text{ kg}}$$

- e) Cuando la gota se encuentra en reposo por la acción del campo eléctrico  $E$ , se verificará que  $mg = qE$ . Por lo tanto

$$q = \frac{4,36 \cdot 10^{-15} \cdot 9,81}{9,35 \cdot 10^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 4,57 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

- f) Sabemos que las cargas  $q$ ,  $q'$  y  $q''$  deben ser múltiplos de una cantidad  $e$  menor, por lo que dividiendo la carga de las tres gotas por la menor de ellas podemos hallar proporciones simples entre ellas

$$\frac{q}{q''} \approx 1,50 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q \approx \frac{3}{2} q''$$

$$\frac{q'}{q''} \approx 1,49 \approx \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q' \approx \frac{3}{2} q''$$

$$\frac{q''}{q''} = 1$$

Las cargas no pueden ser fracciones de la carga elemental, por lo que concluimos que las cargas de cada gota deben ser:

$$\left. \begin{array}{l} q = 3e \\ q' = 3e \\ q'' = 2e \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e \approx 1,52 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

## Prueba experimental. Bobinas de Helmholtz

### Objetivos.

Se van a construir un par de bobinas en montaje de Helmholtz y se va a estudiar experimentalmente el campo magnético que crean en su zona central,  $B_C$ , en función de la corriente que circula por ellas,  $I$ . Además de la dependencia  $B_C(I)$ , se obtendrá la componente horizontal del campo magnético terrestre.

### Materiales.

- Hilo esmaltado de cobre (6,5 m) con conectores ("bananas") en sus extremos.
- Dos cilindros de metacrilato transparente con cinta adhesiva de doble cara en su superficie exterior.
- Cinta adhesiva y masilla ("blu-tack").
- Cartulina.
- Regla.
- Dos imanes cilíndricos iguales, e hilo de algodón para colgarlos.
- Cilindro y barra de PVC.
- Cables de conexión eléctrica.
- Potenciómetro.
- Pila de petaca.
- Polímetro.
- Cronómetro.

### Modelo teórico.

El campo magnético en el centro O de una bobina de  $N$  espiras circulares de radio  $R$ , delgadas y apretadas, por las que circula una corriente  $I$  es

$$B_O = \frac{\mu_0 N I}{2R} \quad (1)$$

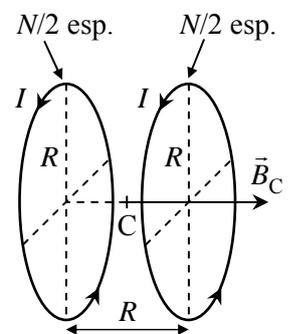
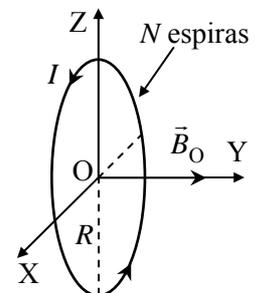
donde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$  es la permeabilidad del vacío. La dirección y el sentido de este campo se indican en la figura 1, donde por simplicidad se ha dibujado una única espira. Este campo no es uniforme, sino que decrece rápidamente a lo largo del eje de simetría de la espira (OY en la figura 1).

En muchas ocasiones interesa disponer de un campo magnético uniforme en una zona del espacio. Uno de los montajes más empleados para conseguirlo son las llamadas *bobinas de Helmholtz*: se hace circular la misma corriente y en el mismo sentido por dos bobinas iguales y coaxiales situadas en planos paralelos, separados una **distancia igual al radio de las espiras** (figura 2; de nuevo se ha representado una única espira en cada bobina). Puede demostrarse que con esta configuración geométrica el campo magnético en torno al centro geométrico C del sistema es muy uniforme, con variaciones inferiores al 1% dentro de una región con dimensiones del orden de  $R/2$ .

Lógicamente, el campo magnético en C seguirá siendo directamente proporcional al número total  $N$  de espiras de las dos bobinas ( $N/2$  en cada una) y a la corriente  $I$  que circula por ellas. Pero la distancia de C a los conductores es mayor que el radio de las espiras, por lo que es de esperar que  $B_C$  sea inferior al que se tiene en el centro de una única bobina de  $N$  espiras, es decir

$$B_C = K B_O \quad (2)$$

donde  $K$  es una constante menor que la unidad. El primer objetivo de esta prueba experimental es determinar el valor de esta constante.



Para medir el campo magnético se va a emplear una brújula formada por los dos imanes cilíndricos, unidos longitudinalmente y colgados mediante un hilo. En equilibrio, el eje del cilindro se orienta en la dirección del campo magnético, y el periodo  $T$  de **pequeñas** oscilaciones torsionales de la brújula (en el sentido de retorcer el hilo) en torno a dicha orientación de equilibrio depende del módulo del campo,  $B$ , en la forma<sup>2</sup>

$$\frac{1}{T^2} = \alpha B \quad (3)$$

donde  $\alpha$  es una constante que depende de la "potencia" del imán (de su *momento magnético*) y de la masa y dimensiones del cilindro (de su *momento de inercia*). Para nuestra brújula

$$\alpha = (4,0 \pm 0,1) \cdot 10^4 \text{ T}^{-1} \text{s}^{-2} \quad (4)$$

Las bobinas de Helmholtz se orientarán con su eje en la dirección del campo magnético terrestre  $B_H$  (componente horizontal), y la brújula se colocará en el centro de las bobinas, de forma que estará sometida a un campo total aproximadamente uniforme

$$B = B_H + B_C = B_H + K \frac{\mu_0 N}{2R} I \quad (5)$$

Consideraremos el campo  $B_H$  como positivo. Pero nótese que el campo  $B_C$  de las bobinas puede ser positivo o negativo según sea el signo de  $I$ , es decir el sentido de la corriente que circula por ellas.

El valor local de  $B_H$  depende notablemente de la proximidad de estructuras de hierro, del edificio o de la propia mesa de trabajo, y será la segunda incógnita del problema.

### Montaje experimental.

#### 1) Construcción de las bobinas de Helmholtz (figura 3).

- \* Retira el papel protector de la cinta adhesiva de doble cara que hay pegada en la superficie exterior de cada cilindro de metacrilato. Esta superficie adhesiva va a facilitar el bobinado de las espiras.
- \* **Dejando libres unos 30 cm de hilo de cobre**, con su banana, comienza a bobinar **10 vueltas** de hilo sobre la cinta adhesiva de un cilindro. Para que no se despegue el punto inicial del bobinado, emplea un trozo de cinta adhesiva normal. Procura que las sucesivas espiras sean bien circulares y estén bien apretadas<sup>3</sup> unas a otras. Sugerencia: tras dar cada vuelta de hilo, empuja lateralmente con las uñas para apretarla contra las anteriores.
- \* Asegura el punto final de las espiras con cinta adhesiva. Comprueba que has contado bien el número de espiras,  $N/2 = 10$ .
- \* **Deja libres unos 20 cm de hilo** entre las dos bobinas y repite el proceso de bobinado de 10 espiras sobre el segundo cilindro de metacrilato.
- \* Si has realizado correctamente el proceso anterior, deberían quedar libres al final unos 30 cm de hilo de cobre, con su banana de conexión.
- \* Traza una línea longitudinal en la cartulina y dos líneas perpendiculares a la anterior separadas entre sí una distancia igual al radio de las espiras. Estas líneas te serán útiles como referencia visual para situar a continuación las bobinas en montaje de Helmholtz.



Fig. 3

<sup>2</sup> Supuesto despreciable el momento de torsión del hilo del que cuelga la brújula.

<sup>3</sup> El hilo de cobre está esmaltado con un material aislante, de forma que no hay contacto eléctrico entre espiras adjuntas.

- \* Pega un trocito de masilla sobre cada cilindro, en la zona de principio y fin del bobinado, y pega los cilindros sobre las líneas transversales de la cartulina, con sus ejes de simetría sobre la línea longitudinal dibujada y los hilos de cobre sobre la cartulina, como se muestra en la figura 3. Las dos bobinas deben **ser coaxiales, estar en planos verticales separados una distancia igual al radio de las espiras** (entre los planos centrales de los dos bobinados) **y la corriente debe circular en el mismo sentido por ambas**.
- \* Como la masilla es plástica, es fácil realizar pequeños retoques de orientación o distancia entre las bobinas presionando en el sentido adecuado.
- \* Por último, dobla y sujeta a la cartulina con cinta adhesiva todos los hilos de cobre juntos, de forma que sean aproximadamente paralelos al eje del sistema. Como es fácil comprender, de esta forma se anula el campo magnético que produce la corriente que circula por ellos y que podría afectar a las medidas.
- \* **Atención:** maneja con cuidado el hilo de cobre porque es bastante frágil. En particular, evita las curvaturas fuertes y los nudos, que pueden provocar que se rompa, con la consiguiente pérdida de tiempo por tener que empezar de nuevo. Por otra parte, ten también **cuidado de no cortarte con el hilo**.

## 2) Construcción de la brújula (figura 4).

- \* Une longitudinalmente los dos imanes y átalos por su centro con una lazada de hilo de algodón (también puedes aprisionar el hilo entre los dos imanes).
- \* Cuelga la brújula del soporte construido con el tubo y la barra de PVC. Con los imanes cerca de la mesa, sujeta el hilo a la barra con cinta adhesiva.
- \* Se puede ajustar la altura de la brújula girando la barra de PVC para enrollar o desenrollar hilo, y la posición horizontal desplazando la barra en el tubo.
- \* Es inevitable que el imán quede en equilibrio un poco inclinado respecto a la horizontal, ya que el campo local también tiene componente vertical.



Fig. 4

## 3) Disposición final y conexiones eléctricas (figura 5).

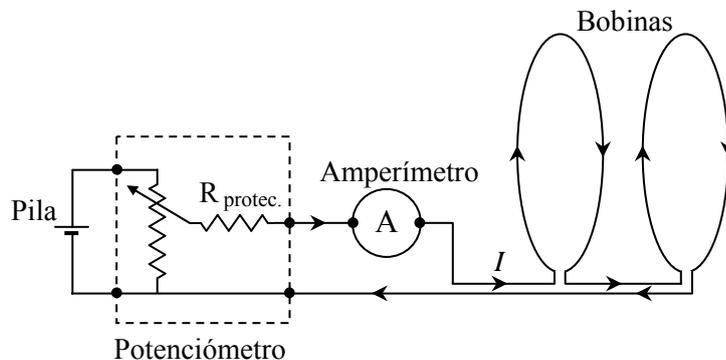
- \* Procura situar el montaje alejado de elementos de hierro de la mesa (patas, travesaños ...).
- \* Sitúa la brújula en la zona central de las bobinas. La brújula marca, en equilibrio, la dirección de la componente horizontal del campo magnético local,  $B_H$ . Orienta las bobinas de forma que su eje de simetría coincida con esta dirección y el centro de la brújula esté en el centro de las bobinas.
- \* Una vez conseguida la posición adecuada del soporte de la brújula y de las bobinas, sujeta el sistema a la cartulina y a la mesa con cinta adhesiva para evitar posteriores movimientos involuntarios.
- \* Las bobinas se alimentan con una pila de petaca a través de un potenciómetro (resistencia variable) que permite ajustar la tensión aplicada a las bobinas<sup>4</sup>.
- \* Conecta la pila y las bobinas al potenciómetro con los cables suministrados, siguiendo el esquema de la figura 6, donde los puntos negros indican los puntos de conexión con bananas.
- \* **Atención:** para conseguir un buen contacto eléctrico, las lengüetas terminales de la pila deben introducirse entre el metal y el plástico de los conectores (no dentro del terminal metálico, que es demasiado ancho).



Fig. 5

<sup>4</sup> Como puedes observar, el potenciómetro lleva montada una resistencia de protección para evitar corrientes elevadas que agotarían rápidamente la pila.

- \* La corriente  $I$  se mide con el polímetro actuando como amperímetro, conectado en serie en el circuito. Emplea la escala de 200 mA.
- \* Atención: para evitar que se agote la pila, **mantén el circuito abierto cuando no estés midiendo**.
- \* Antes de empezar a medir, familiarízate con el manejo del potenciómetro, el polímetro y el cronómetro.
- \* Inicialmente se va a medir con  $B_C$  positivo, es decir en el mismo sentido que  $B_H$ . Teniendo en cuenta (3) y (5), esto implica que el periodo de oscilación torsional de la brújula,  $T$ , debe ser decreciente con  $I$  (es decir, a mayor  $I$  menor  $T$ ). Si en tu sistema ocurre lo contrario, invierte el sentido de la corriente, intercambiando las conexiones de la pila al potenciómetro.
- \* La situación anterior, según nuestro convenio de signos, corresponde a  $I > 0$ . Si el amperímetro indica una corriente negativa, intercambia los puntos de conexión en el polímetro.
- \* Posteriormente se realizarán medidas con  $I < 0$ , para lo que tendrás que invertir el sentido de la corriente.
- \* Si te encuentras con que  $T$  no depende apenas de  $I$ , hay un problema de montaje en tu circuito: o bien la corriente no está circulando por las bobinas (revisa las conexiones), o lo hace en sentidos opuestos.
- \* Después de hacer las medidas, **deja tu montaje experimental sobre la mesa, tal y como lo has utilizado para medir**, ya que el equipo de correctores lo valorará durante la prueba. Al final, después de entregar el ejercicio, desmonta el sistema y recoge sus diversos elementos en las cajas correspondientes.



### Medidas y preguntas.

- Mide el periodo  $T$  de pequeñas oscilaciones torsionales de la brújula en torno a su orientación de equilibrio para un mínimo de diez valores de  $I$ , entre  $I = 0$  e  $I = 200$  mA. Explica detalladamente tu método de medida y presenta los resultados en la tabla de la hoja de respuestas. Tabula también los valores de  $1/T^2$ , que necesitarás más adelante.
- Invierte el sentido de la corriente, y haz varias medidas de  $T$  entre  $I = 0$  e  $I = -80$  mA. Presenta los resultados en la tabla de la hoja de respuestas.
- Representa gráficamente en un papel milimetrado todos los puntos  $(x, y) = (I, 1/T^2)$ .
- Determina la pendiente,  $p$ , y la ordenada en el origen,  $y_0$ , de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.
- Deduces los valores de la constante  $K$  de las bobinas de Helmholtz y del campo magnético local  $B_H$ .
- Haz una estimación razonada de la incertidumbre  $\Delta p$  de la pendiente obtenida en el apartado d).
- Teniendo en cuenta lo anterior y la incertidumbre de la constante  $\alpha$  dada en (4), haz una estimación de la incertidumbre  $\Delta K$  de la constante de las bobinas que has obtenido en e).
- En el apartado b) has medido  $T$  hasta  $I = -80$  mA. Si has probado a seguir aumentando la corriente en este sentido negativo, habrás observado que al principio la brújula oscila muy lentamente, que para una corriente suficientemente alta "pierde el rumbo", es decir da vueltas o oscila en torno a una dirección diferente, y que, para corrientes más altas, la brújula se orienta en sentido opuesto al inicial. ¿Podrías explicar este comportamiento? Teniendo en cuenta tus resultados del apartado e), ¿a partir de qué corriente  $I_0$  se espera teóricamente la inversión de sentido de la brújula? Mide experimentalmente  $I_0$  y comprueba si coinciden aproximadamente.

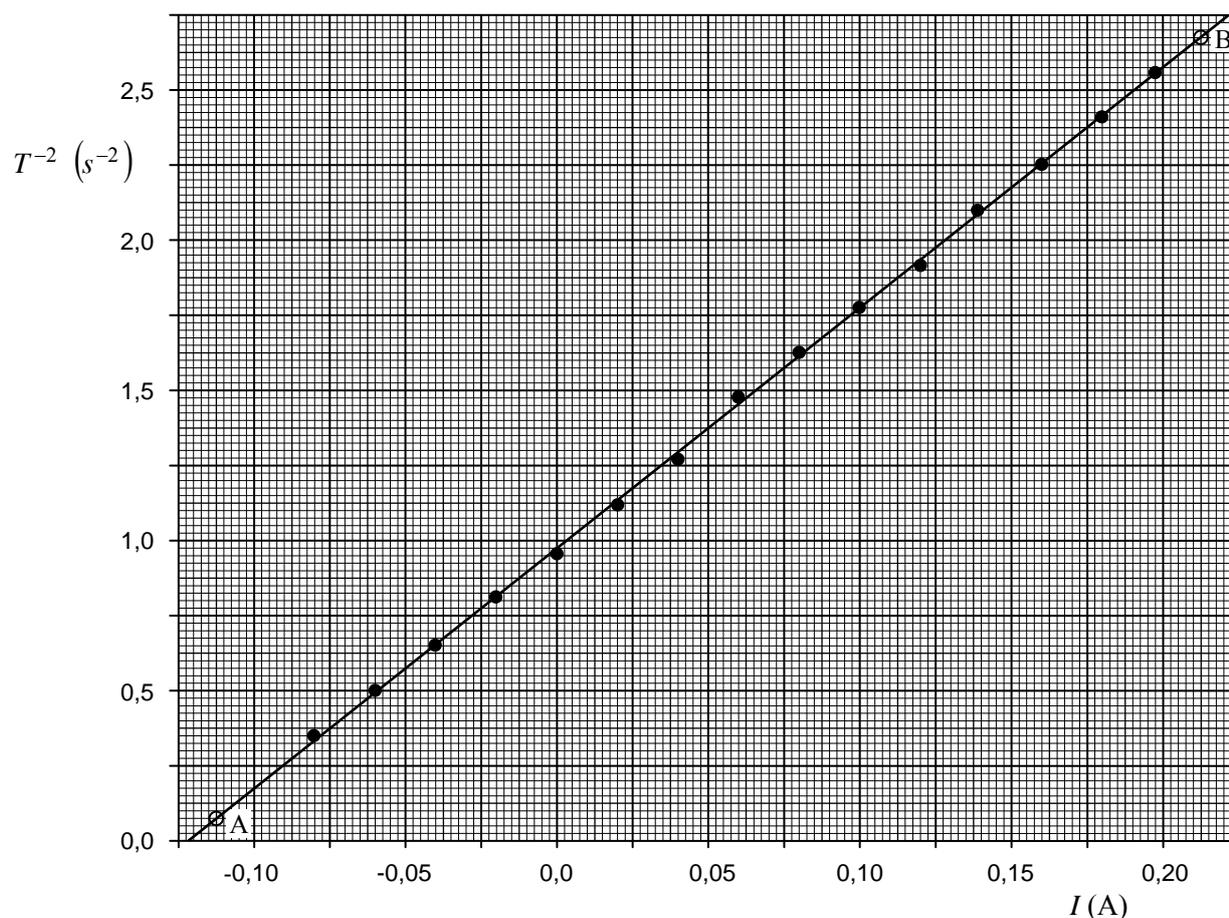
### Solución prueba experimental. Bobinas de Helmholtz

- a) El periodo de oscilación puede medirse con buena precisión cronometrando el tiempo de, por ejemplo, diez oscilaciones completas de la brújula, tras darle un pequeño impulso torsional. La incertidumbre de esta medida puede estimarse en 0,1 s, de forma que la incertidumbre del periodo  $T$  es del orden de 0,01 s. Esta incertidumbre puede reducirse aumentando el número de oscilaciones de la medida o realizando varias medidas y promediando.

En la siguiente tabla se recogen los valores de  $T$  y  $1/T^2$ , que se necesitarán más adelante, medidos a intervalos aproximadamente regulares de 20 mA entre  $I = -80$  mA e  $I = 200$  mA. Los valores presentados son el promedio de cuatro medidas de diez oscilaciones.

$I$ (mA)	-80,5	-59,8	-40,1	-20,4	0,0	20,1	40,1	60,2	80,2	100,1	120,2	138,8	160,3	180,3	197,4
$T$ (s)	1,703	1,415	1,238	1,107	1,025	0,945	0,887	0,822	0,785	0,750	0,722	0,690	0,666	0,644	0,625
$1/T^2$ ( $s^{-2}$ )	0,345	0,499	0,653	0,816	0,952	1,120	1,271	1,480	1,623	1,778	1,918	2,100	2,255	2,411	2,560

- b) Las medidas con intensidades negativas ya se han presentado en la tabla anterior.
- c) A continuación se presenta la gráfica pedida, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado.



- d) En la gráfica anterior también se ha trazado la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. La pendiente,  $p$ , y la ordenada en el origen,  $y_0$ , de esta recta pueden determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos de dicha recta. Para mejorar la precisión del resultado interesa tomar dos puntos alejados, por ejemplo los puntos A y B indicados en la gráfica, elegidos cerca de los extremos de la recta y coincidentes con cruces en la cuadrícula, para facilitar la lectura precisa de sus coordenadas.

$$(x_A; y_A) = (-0,1125 \text{ A}; 0,075 \text{ s}^{-2})$$

$$(x_B; y_B) = (0,2125 \text{ A}; 2,675 \text{ s}^{-2})$$

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow \boxed{p = 8,00 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}}$$

La ordenada en el origen de la recta puede deducirse de las coordenadas de uno de los puntos auxiliares (o también puede leerse directamente en la gráfica)

$$y_A = px_A + y_0 \rightarrow y_0 = y_A - px_A \rightarrow \boxed{y_0 = 0,975 \text{ s}^{-2}}$$

Nota: un ajuste analítico por el método de *mínimos cuadrados* conduce a un resultado muy similar:

$$p = 8,001 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}, \quad y_0 = 0,9736 \text{ s}^{-2}$$

- e) De acuerdo con las expresiones (3) y (5) del enunciado, se espera que la dependencia de  $1/T^2$  con  $I$  sea lineal, con pendiente y ordenada en el origen

$$p = \alpha K \frac{\mu_0 N}{2R} \rightarrow K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

$$y_0 = \alpha B_H \rightarrow B_H = \frac{y_0}{\alpha}$$

Con los datos del enunciado y el valor del radio de las espiras<sup>5</sup>,  $R = 4,5 \text{ cm}$ , se obtiene

$$\boxed{K = 0,716}$$

$$\boxed{B_H = 2,44 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$$

- f) Para hacer una estimación de la incertidumbre de la pendiente vamos a trazar las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Para ello hay que tener en cuenta la dispersión de los puntos respecto a la recta de mejor ajuste, que es nuestro caso es en promedio inferior al radio de los puntos dibujados. También es necesario tener en cuenta la incertidumbre estimada para los propios puntos experimentales. No vamos a tener en cuenta los posibles errores por falta de calibración del amperímetro, ya que no tenemos datos al respecto, pero sí podemos hacer una estimación de la incertidumbre de los valores de  $1/T^2$  obtenidos tras cronometrar el periodo de oscilación. Con el método de medida empleado (promedio de cuatro medidas de diez oscilaciones) una estimación razonable para la incertidumbre del periodo es

$$\Delta T = 0,005 \text{ s}$$

La incertidumbre de  $1/T^2$  puede calcularse numéricamente para cada punto a partir de los valores de  $T_{\max} = T + \Delta T$  y  $T_{\min} = T - \Delta T$  o, de una forma más elegante, tomando incrementos (en valor absoluto)

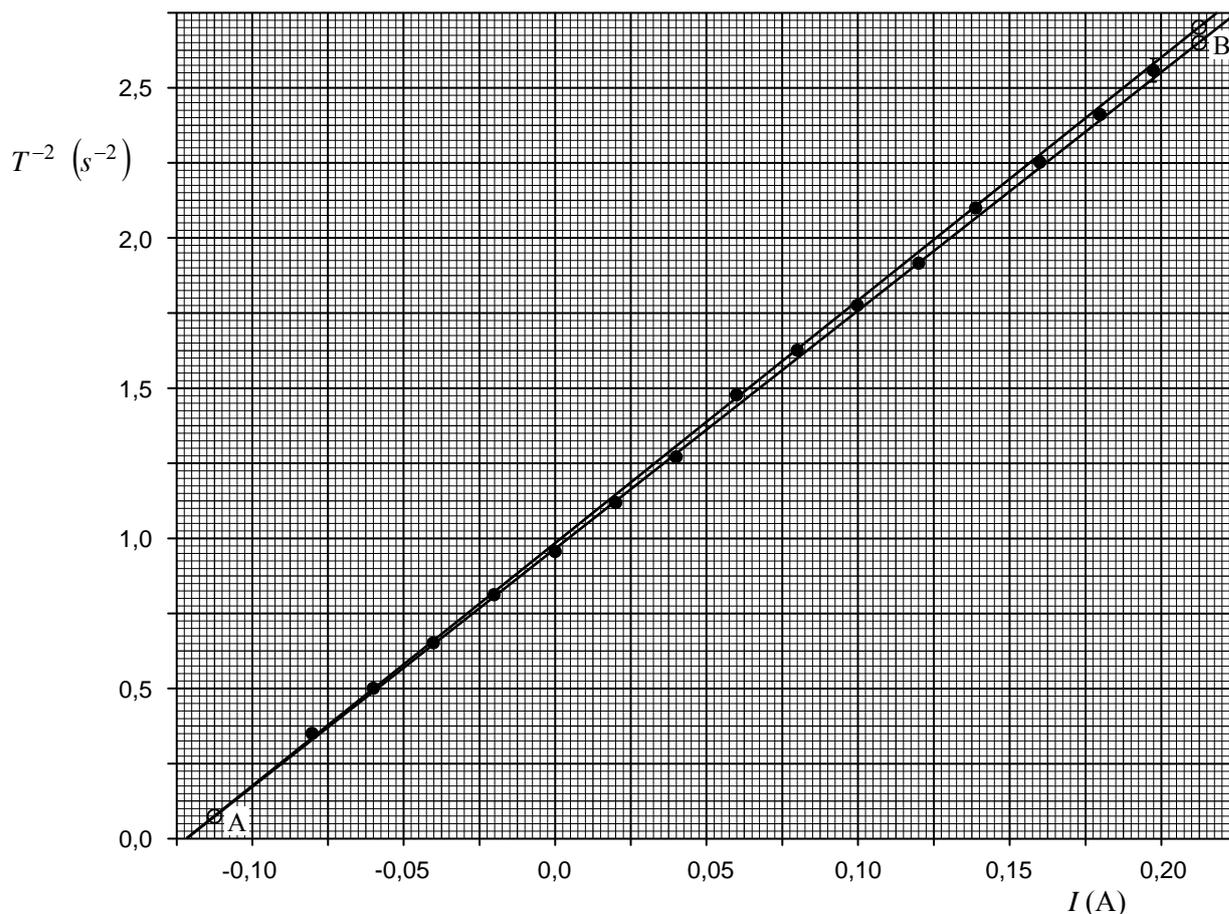
$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right) = 2 \frac{\Delta T}{T^3}$$

<sup>5</sup> Este es el radio del cilindro de metacrilato, que puede medirse con la regla con una incertidumbre del orden de 0,5 mm. El radio medio real de las espiras es algo superior debido al grosor de la cinta adhesiva y al diámetro del cable de cobre, que es de 0,3 mm. Esta pequeña fuente de error puede despreciarse frente a la incertidumbre de la constante  $\alpha$ .

De una forma u otra es fácil comprobar que la incertidumbre de los primeros puntos, los correspondientes a corrientes negativas, es muy pequeña, inferior al tamaño de los puntos dibujados. Para corriente creciente la incertidumbre va aumentando y, por ejemplo, en el punto de corriente más alta alcanza el valor máximo

$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right)_{I=197\text{mA}} = 0,04 \text{ s}^{-2}$$

En total, la "barra de error" del último punto no alcanza dos cuadrillos a cada lado en la escala de la gráfica dibujada. Teniendo esto en cuenta, y la ya citada escasa dispersión de los puntos experimentales respecto a la recta óptima, es razonable considerar las rectas de pendientes máxima y mínima que a continuación se presentan, construidas manteniendo fijo el punto auxiliar A y con desviaciones de  $\pm 0,025 \text{ s}^2$  (un cuadrillo) en la coordenada  $y_B$  del segundo punto auxiliar



Con este criterio, es inmediato obtener los valores máximo y mínimo estimados para la pendiente, y su incertidumbre<sup>6</sup>

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} = 8,08 \text{ s}^{-2}\text{A}^{-1} \\ p_{\min} = 7,92 \text{ s}^{-2}\text{A}^{-1} \end{array} \right\} \Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \rightarrow \boxed{\Delta p = 0,08 \text{ s}^{-2}\text{A}^{-1}}$$

g) En el apartado e) se ha obtenido la constante  $K$  aplicando la expresión

$$K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

Para calcular la incertidumbre de  $K$  es necesario "propagar" las incertidumbres de la pendiente  $p$  y de la constante  $\alpha$ .

<sup>6</sup> Un cálculo (no ponderado) da como resultado una incertidumbre  $\Delta p = 0,1 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}$  con un nivel de confianza del 95%.

Un método sencillo y rápido, aunque no muy exacto, de calcular los valores máximo y mínimo de  $K$  consiste en ponerse en el "peor de los casos", es decir en combinar el valor máximo de  $p$  en el numerador con el mínimo de  $\alpha$  en el denominador, y viceversa

$$\left. \begin{aligned} K_{\max} &= \frac{2p_{\max}R}{\mu_0 \alpha_{\min}N} = 0,742 \\ K_{\min} &= \frac{2p_{\min}R}{\mu_0 \alpha_{\max}N} = 0,692 \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta K = 0,025$$

Como las dos fuentes de error consideradas son independientes, es más razonable, aunque también algo más laborioso, calcular independientemente sus influencias en la incertidumbre de  $K$

$$\Delta K_p = \frac{1}{2}(K_{\max} - K_{\min})_p = \frac{1}{2} \frac{2R}{\mu_0 \alpha N} (p_{\max} - p_{\min}) = \frac{2R}{\mu_0 \alpha N} \Delta p = K \frac{\Delta p}{p} = 0,007$$

$$\Delta K_\alpha = \frac{1}{2}(K_{\max} - K_{\min})_\alpha = \frac{1}{2} \frac{2pR}{\mu_0 N} \left( \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}} \right) \approx \frac{2pR}{\mu_0 N} \frac{\Delta \alpha}{\alpha^2} = K \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 0,018$$

Una estimación razonable de la incertidumbre total de  $K$  sería la suma de estos dos contribuciones

$$\Delta K = \Delta K_p + \Delta K_\alpha = 0,25$$

Pero, teniendo de nuevo en cuenta que las dos fuentes de error son independientes, es más correcto calcularla en la forma

$$\Delta K = \sqrt{\Delta K_p^2 + \Delta K_\alpha^2} = 0,019 \rightarrow \boxed{\Delta K \approx 0,02}$$

El resultado final del experimento sería

$$\boxed{K = 0,72 \pm 0,02}$$

Nota 1: el valor de  $\Delta K_\alpha$  es bastante mayor que el de  $\Delta K_p$ . Por ello, al redondear como es habitual a una única cifra significativa el resultado final, desaparece prácticamente la influencia de  $\Delta p$ . En otras palabras, si se quisiese mejorar la precisión del valor de  $K$ , sería prioritario conocer  $\alpha$  con menos incertidumbre.

Nota 2: el valor teórico de la constante  $K$ , supuesto que el cable conductor es muy delgado, es

$$K = \frac{8}{5^{3/2}} = 0,7155$$

- h)** La brújula se orienta en la dirección y sentido del campo magnético horizontal. En nuestro caso, cuando la corriente  $I$  es positiva, el campo de las bobinas  $B_C$  lleva el mismo sentido que el terrestre  $B_H$ , pero cuando la corriente  $I$  es negativa  $B_C$  lleva sentido opuesto a  $B_H$ . Mientras  $B_H > |B_C|$ , el campo total sigue llevando el sentido de  $B_H$  (esta es la región de corrientes negativas en la que se ha medido). Pero para una corriente negativa suficientemente intensa  $|B_C|$  superará a  $B_H$  y el campo resultante tendrá sentido inverso, por lo que la brújula girará  $180^\circ$  y se orientará, en equilibrio, en sentido opuesto al inicial.

Cuando el campo total es muy débil, el movimiento de la brújula está influido apreciablemente por el momento de torsión del hilo del que cuelga. Por ejemplo, si el hilo está inicialmente retorcido, la brújula empieza a girar y parece volverse loca.

El punto de inversión corresponde obviamente a campo total nulo. Teniendo en cuenta la expresión (5) del enunciado, esto ocurre para una corriente  $I_0$  que cumpla

$$B = B_H + K \frac{\mu_0 N}{2R} I_0 = 0 \leftrightarrow I_0 = -\frac{2RB_H}{K\mu_0 N} \quad \boxed{I_0 = -0,122 \text{ A}}$$

Este valor también puede leerse directamente en la gráfica de  $1/T^2$  frente a  $I$ , en el punto de corte de la recta de ajuste con el eje de abscisas, pues según (3)  $B = 0$  implica  $1/T^2 = 0$ .

PATROCINADORES:



Consejería de Educación,  
Formación y Empleo

COLABORADORES:

**Facultad de Química**  
**Departamento de Física**



**lo·um** LABORATORIO DE ÓPTICA  
Universidad de Murcia

DISPOSITIVOS, INVESTIGACIÓN y  
APLICACIONES en NANOCIENCIA

